Lógica Curso 2017-18 Semántica en LPO

Ejercicios resueltos - Enunciados

1. Construir un modelo y un contramodelo de la siguiente fórmula sobre el dominio {1,2,3}:

$$\exists x \neg Q(f(x)) \wedge \neg \exists z (\forall y P(z,y) \rightarrow Q(f(z)))$$

2. Demostrar con medios semánticos que el siguiente razonamiento no es correcto utilizando un dominio de dos elementos:

$$\{ \exists x (P(x) \rightarrow Q(x,a)) , P(a) , \neg R(b) , \forall x (Q(x,a) \rightarrow R(b)) \} \vDash \forall x (P(x) \rightarrow R(x))$$

examen repesca enero 2017

3. Demostrar con medios semánticos que el siguiente razonamiento no es correcto utilizando un dominio de dos elementos:

$$\{ P(b) , \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x,a)), \forall x (P(x) \rightarrow \exists y Q(x,y)) \} \vDash \exists x Q(x,x)$$

eval LPO dicbre 2016

4. Definir un contramodelo para demostrar que la siguiente relación de consecuencia lógica NO se verifica:

$$\{ \forall x (Q(x) \rightarrow R(x)), \forall x (P(x) \rightarrow R(x)), P(a) , Q(b) \} \vDash \exists x (P(x) \wedge Q(x))$$

examen julio 2017

5. Analizar si existe o no relación de consecuencia lógica en los siguientes esquemas de argumentación utilizando razonamiento semántico:
   a) $\{ \forall z \exists x P(x,z) , \exists x P(x,a) \} \vDash \exists x \forall z P(x,z)$
   b) $\{ \forall x P(x) \rightarrow Q(c) \} \vDash \exists x (P(x) \rightarrow Q(c))$

6. Averiguar si la fórmula $Q(a,b) \vee Q(c,c)$ es o no consecuencia lógica de cada uno de los siguientes conjuntos:

   1) $\{ \exists x P(x) , \forall y (P(y) \rightarrow Q(a,y)) \}$

   2) $\{ \exists x P(x) , \forall y (P(y) \rightarrow Q(c,c)) \}$

eval enero 2016

7. Probar: $\exists x P(x) \rightarrow Q(a) \vDash \forall x (P(x) \rightarrow Q(a))$

Construir un modelo y un contramodelo de la siguiente fórmula sobre el dominio {1,2,3}:

$$\exists x \neg Q(f(x)) \land \neg \exists z(\forall y P(z,y) \rightarrow Q(f(z)))$$

Definimos un interpretación I(D, i()) en el dominio {1,2,3}

Tendremos tres constantes en el lenguaje de primer orden que utlizaremos L={a,b,c}

Definimos la función de interpretación i()

Función de interpretación para las constantes:

i(a)=1, i(b)=2, i(c)=3

Función de interpretación para las funciones:

i(f(a))=a, i(f(b))=b, i(f(c))=c

Función de interpretación para los predicados:

i(Q(a)) = , i(Q(b)) = , i(Q(c))=

i(P(a,a)) = , i(P(a,b)) = , i(P(a,c)) =

i(P(b,a)) = , i(P(b,b)) = , i(P(b,c)) =

i(P(c,a)) = , i(P(c,b)) = , i(P(c,c)) =

Buscamos un **Modelo**, una interpretación que haga verdadera la fórmula:

$$i(\exists x \neg Q(f(x))) \land \neg \exists z(\forall y P(z,y) \rightarrow Q(f(z)))) = V$$

sii

$i(\exists x \neg Q(f(x))) = V$ **y** $i(\neg \exists z(\forall y P(z,y) \rightarrow Q(f(z)))) = V$

$i(\exists x \neg Q(f(x))) = V$ sii

z=a $i(\neg Q(f(a))) = V$ sii $\mathbf{i(Q(f(a))) = F}$

o bien

z=b $i(\neg Q(f(b))) = V$ sii $\mathbf{i(Q(f(b))) = F}$

o bien

z=c $i(\neg Q(f(c))) = V$ sii $\mathbf{i(Q(f(c))) = F}$

$i(\neg\exists z(\forall y P(z,y) \rightarrow Q(f(z)))) = V$ sii $\exists z(\forall y P(z,y) \rightarrow Q(f(z))) = F$

z=a $i(\forall y P(a,y) \rightarrow Q(f(a))) = F$ sii

$i(\forall y P(a,y)) = V$ y $\mathbf{i(Q(f(a))) = F}$

$\mathbf{i(P(a,a))=V}$

y $\mathbf{i(P(a,b))=V}$

y $\mathbf{i(P(a,c))=V}$

y

z=b $i(\forall y P(b,y) \rightarrow Q(f(b))) = F$ sii

$i(\forall y P(b,y)) = V$ y $\mathbf{i(Q(f(b)) = F}$

$\mathbf{i(P(b,a))=V}$

y $\mathbf{i(P(b,b))=V}$

y $\mathbf{i(P(b,c))=V}$

y

z=c $i(\forall y P(b,y) \rightarrow Q(f(b))) = F$ sii

$i(\forall y P(c,y)) = V$ y $\mathbf{i(Q(f(c))) = F}$

$\mathbf{i(P(c,a))=V}$

y $\mathbf{i(P(c,b))=V}$

y $\mathbf{i(P(c,c))=V}$

Modelo: i(Q(a)) = F, i(Q(b)) = F, i(Q(c))= F, i(P(a,a)) = V, i(P(a,b)) = V, i(P(a,c)) = V, i(P(b,a)) = V, i(P(b,b)) = V, i(P(b,c)) = V, i(P(c,a)) = V, i(P(c,b)) = V, i(P(c,c)) = V

Contramodelo

Buscamos un **ContraModelo**, una interpretación que haga falsa la fórmula:

$i(\exists x \neg Q(f(x)) \wedge \neg \exists z(\forall y P(z,y) \rightarrow Q(f(z)))) = F$

sii

$i(\exists x \neg Q(f(x))) = F$ o bien $i(\neg \exists z(\forall y P(z,y) \rightarrow Q(f(z))))) = F$

$i(\exists z \neg Q(f(x))) = F$ sii

$z=a$ $i(\neg Q(f(a))) = F$ sii $i(Q(f(a))) = V$

y

$z=b$ $i(\neg Q(f(b))) = F$ sii $i(Q(f(v))) = V$

y

$z=c$ $i(\neg Q(f(c))) = F$ sii $i(Q(f(c))) = V$

Contramodelo: **$i(Q(f(a))) = V$, $i(Q(f(b))) = V$, $i(Q(f(c))) = V$**

Demostrar con medios semánticos que el siguiente razonamiento no es correcto utilizando un dominio de dos elementos:

$\{ \exists x (P(x) \rightarrow Q(x,a)) ,\ P(a) ,\ \neg R(b) ,\ \forall x (Q(x,a) \rightarrow R(b)) \} \vDash \forall x (P(x) \rightarrow R(x))$

Examen enero 2017

$$\{ \underbrace{\exists x (P(x) \rightarrow Q(x,a))}_{A1} ,\quad \underbrace{P(a)}_{A2} ,\quad \underbrace{\neg R(b)}_{A3} ,\quad \underbrace{\forall x (Q(x,a) \rightarrow R(b))}_{A4} \} \vDash \underbrace{\forall x (P(x) \rightarrow R(x))}_{B}$$

$D = \{0,1\}$ $\quad I(a) = 0$, $I(b) = 1$

Buscamos interpretación I tal que $I(A1) = I(A2) = I(A3) = I(A4) = V$ y $I(B) = F$

*) $I(A2) = I(P(a)) = V \longrightarrow \boxed{P_D(0) = V}$

*) $I(A3) = I(\neg R(b)) = V \longrightarrow I(R(b)) = F \longrightarrow \boxed{R_D(1) = F}$

*) $I(B) = I(\forall x (P(x) \rightarrow R(x))) = F \longrightarrow I(\exists x \neg (P(x) \rightarrow R(x))) = V \longrightarrow I(\exists x (\neg P(x) \vee \neg R(x))) = V$

para x=b $\quad I(\neg P(b) \vee \neg R(b)) = V \quad$ pues $I(\neg R(b)) = V$

*) $I(A4) = I(\forall x (Q(x,a) \rightarrow R(b))) = V$

como $I(R(b)) = F \quad I(\forall x (Q(x,a)) = F$

para x=a $\quad I(Q(a,a)) = F \quad \boxed{Q_D(0,0) = F}$

para x=b $\quad I(Q(b,a)) = F \quad \boxed{Q_D(1,0) = F}$

*) $I(A1) = I(\exists x (P(x) \rightarrow Q(x,a))) = V$

para x=a $\quad I(P(a) \rightarrow Q(a,a)) = F$ pues $P_D(0) = V$ y $Q_D(0,0) = F$

debe ser $\quad I(P(b) \rightarrow Q(b,a)) = V$

como $Q_D(1,0) = F \quad I(P(b)) = F \quad \boxed{P_D(1) = F}$

$\Rightarrow$ cualquier interpretación I que cumpla las condiciones anteriores es el contramodelo buscado, independientemente de cómo sean $R_D(1)$, $Q_D(0,0)$ y $Q_D(0,0)$

Solución de Andrei:

D={0,1}, i(a)=0, i(b)=1.

A1: i(∃x (P(x) → Q(x,a)))=V sii {x/a} i(P(a) → Q(a,a))=V o {x/b} i(P(b) → Q(b,a))=V sii

i(P(a))=F o i(Q(a,a))=V o i(P(b))=F o i(Q(b,a))=V A1a o A1b o A1c o A1d

A2: i(P(a))=V A2

A3: i(¬R(b))=V sii i(R(b))=F A3

A4: i(∀x (Q(x,a) → R(b)))=V sii {x/a} i(Q(a,a) → R(b))=V y {x/b} i(Q(b,a) → R(b)) sii

[i(Q(a,a))=F o i(R(b))=V] y [i(Q(b,a))=F o i(R(b))=V] [A4a o A4b] y [A4c o A4d]

B: i(∀ x (P(x) →R(x)))=F sii {x/a} i(P(a) →R(a))=F o {x/b} i(P(b) →R(b))=F sii

[i(P(a))=V y i(R(a))=F] o[i(P(b))=V y i(R(b))=F] [Ba y Bb] o [Bc y Bd]

Discusión: A2 entra en conflicto con A1a; A3 entra en conflicto con A4b y A4d, tenemos ahora:

A1: (A1b o A1c o A1d) con A4:(A4a y A4c) pero A4a entra en conflicto con A1b y A4c con A1d, entonces:

A1c, A2, A3, A4a, A4c: i(P(b))=F, i(P(a))=V, i(R(b))=F, i(Q(a,a))=F, i(Q(b,a))=F

Pero Bc entra en conflicto con A1c, entonces tenemos desde B: i(P(a))=V y i(R(a))=F

Ba es compatible con A2 y podemos definir en la interpretación de R que i(R(a))=F:

No es consecuencia lógica, un contraejemplo que lo demuestra es:

$i(P^1)$={<0>=>V, <1>=>F }

$i(Q^2)$={ <0,0>=>F, <0,1>=>V, <1,0>=>F, <1,1>=>V}

$i(R^1)$={<0>=>F, <1>=>F}

Demostrar con medios semánticos que el siguiente razonamiento no es correcto utilizando un dominio de dos elementos:

$$\{ P(b) ,\ \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x,a)), \forall x (P(x) \rightarrow \exists y\, Q(x,y)) \} \vDash \exists x\, Q(x,x)$$

---

eval LPO dicbre 2016

D={0,1}, i(a)=0, i(b)=1.

i(∃x Q(x,x))=F sii

{x/a} **i(Q(a,a))=F**

Y además,

{x/b} **i(Q(b,b))=F**

i(P(b))=V

i(∃x (P(x) ∧ ¬Q(x,a)))=V sii

{x/a} i(P(a) ∧ ¬Q(a,a)) = V sii

i(P(a))=V y además i(Q(a,a))=F (tras descartar ~~i(Q(b,a))=F~~ abajo)

O bien,

{x/b} i(P(b) ∧ ¬Q(b,a))=V

i(P(b))=V y además ~~i(Q(b,a))=F~~ (descartado más abajo)

i(∀x (P(x) → ∃x Q(x,y))))=V sii

{x/a} i(P(a) → ∃y Q(a,y))=V sii

~~i(P(a))=F~~

O bien,

i(∃yQ(a,y))=V sii

{x/a} ~~i(Q(a,a))=V~~

O bien,

{x/b} **i(Q(a,b))=V**

{x/b} i(P(b) → ∃y Q(b,y))=V

~~i(P(b))=F~~

O bien,

i(∃yQ(b,y))=V sii

{x/a} **i(Q(b,a))=V**

O bien,

{x/b} ~~i(Q(b,b))=V~~

No es consecuencia lógica, el contramodelo que lo demuestra es: $P_D(0)$=V, $P_D(1)$=V, $Q_D(0,1)$=V, $Q_D(1,0)$=V, $Q_D(0,0)$=F, $Q_D(1,1)$=F.

Definir un contramodelo para demostrar que la siguiente relación de consecuencia lógica NO se verifica:

$$\{\ \forall x\,(Q(x) \rightarrow R(x)),\ \forall x\,(P(x) \rightarrow R(x)),\ P(a),\ Q(b)\ \} \vDash \exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$$

Examen julio 2017

$$\{\ \underbrace{\forall x\,(Q(x) \rightarrow R(x))}_{A_1},\ \underbrace{\forall x\,(P(x) \rightarrow R(x))}_{A_2},\ \underbrace{P(a)}_{A_3},\ \underbrace{Q(b)}_{A_4}\ \} \vDash \underbrace{\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))}_{B}$$

Buscamos una interpretación i tal que

$\forall x\,(Q(x) \rightarrow R(x))$
$\forall x\,(P(x) \rightarrow R(x)$ sean V y $\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))$ sea F
$P(a)$
$Q(b)$

Tomamos como dominio D = {a,b}

<u>1ª solución</u>:

- $i(A_3) = V \longrightarrow \boxed{i(P(a)) = V}$
- $i(A_4) = V \longrightarrow \boxed{i(Q(b)) = V}$
- $i(A_2) \equiv i(\forall x\,(P(x) \rightarrow R(x))) = V$

$$\left.\begin{array}{ll} x = a & i(P(a) \rightarrow R(a)) = V \\ & i(P(a)) = V \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{i(R(a)) = V}$$

y $x = b \quad i(P(b) \rightarrow R(b)) = V \longrightarrow i(P(b)) = F$ ó $i(R(b)) = V$ (1)

- $i(A_1) \equiv i(\forall x\,(Q(x) \rightarrow R(x))) = V$

$x = a \quad i(Q(a) \rightarrow R(a)) = V$ se cumple pues $i(R(a)) = V$

y $$\left.\begin{array}{ll} x = b & i(Q(b) \rightarrow R(b)) = V \\ & i(Q(b)) = V \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{i(R(b)) = V}$$

por tanto, al ser $i(R(b))=V$, también se cumple (1), y A_2 es V

- $i(B) \equiv i(\exists x\,(P(x) \wedge Q(x))) = F$

$$\left.\begin{array}{ll} x = a & i(P(a) \wedge Q(a))=F \\ & i(P(a)) = V \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{i(Q(a)) = F}$$

y $$\left.\begin{array}{ll} x = b & i(P(b) \wedge Q(b))=F \\ & i(Q(b)) = V \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{i(P(b)) = F}$$

Hemos encontrado un contramodelo: $P_D = \{a\}$ $Q_D = \{b\}$ $R_D = \{a,b\}$
que además es el único contramodelo

Por supuesto que hay otras formas de hacer este análisis. Si empezamos por hacer falsa la conclusión B:

2ª solución:

- $i(A_3) = V \longrightarrow \boxed{i(P(a)) = V}$
- $i(A_4) = V \longrightarrow \boxed{i(Q(b)) = V}$
- $i(B) \equiv i(\exists x\, (P(x) \wedge Q(x))) = F$

$$x = a \quad i(P(a) \wedge Q(a)) = F \qquad \left.\begin{array}{l} i(P(a)) = F \text{ ó } i(Q(a)) = F \\ \text{como} \quad i(P(a)) = V \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{i(Q(a)) = F}$$

$$\textbf{y} \quad x = b \quad i(P(b) \wedge Q(b)) = F \qquad \left.\begin{array}{l} i(P(b)) = F \text{ ó } i(Q(b)) = F \\ \text{como} \quad i(Q(b))) = V \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{i(P(b)) = F}$$

- $i(A_1) \equiv i(\forall x\, (Q(x) \rightarrow R(x))) = V$

$$x = a \qquad i(Q(a) \rightarrow R(a)) = V \qquad \text{se cumple pues} \quad i(Q(a)) = F$$

$$\textbf{y} \quad x = b \qquad i(Q(b) \rightarrow R(b)) = V \qquad \left.\begin{array}{l} i(Q(b)) = F \text{ ó } i(R(b)) = V \\ \text{como} \quad i(Q(b))) = V \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{i(R(b)) = V}$$

- $i(A_2) \equiv i(\forall x\, (P(x) \rightarrow R(x))) = V$

$$x = a \qquad i(P(a) \rightarrow R(a)) = V \qquad \left.\begin{array}{l} i(P(a)) = F \text{ ó } i(R(a)) = V \\ \text{como} \quad i(P(a))) = V \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{i(R(a)) = V}$$

$$\textbf{y} \quad x = b \qquad i(P(b) \rightarrow R(b)) = V \qquad \text{se cumple pues} \quad i(P(b)) = F$$

Se obtiene el **mismo resultado** que en la 1ª solución.

Analizar si existe o no relación de consecuencia lógica en los siguientes esquemas de argumentación utilizando razonamiento semántico:

a) $\{\forall z \exists x P(x,z), \exists x P(x,a)\} \vDash \exists x \forall z P(x,z)$

b) $\{\forall x P(x) \rightarrow Q(c)\} \vDash \exists x (P(x) \rightarrow Q(c))$

Para comprobar si hay consecuencia lógica, comprobamos si existen contramodelos (que hagan verdaderas las premisas y falsa la conclusión) para cada una de las argumentaciones. Buscamos contramodelos con dominio D = {a,b,c}

a) $\{\forall z \exists x P(x,z), \exists x P(x,a)\} \vDash \exists x \forall z P(x,z)$

Premisas

$\forall z \exists x P(x,z)$ = V

	z= a	$\exists x P(x,a)$ = V sii		
			x=a	**P(a,a)=V**
		o	x=b	P(b,a)=V
		o	x=c	P(c,a)=V
y	z= b	$\exists x P(x,b)$ = V sii		
			x=a	P(a,b)=V
		o	x=b	**P(b,b)=V**
		o	x=c	P(c,b)=V
y	z= c	$\exists x P(x,c)$ = V sii		
			x=a	P(a,c)=V
		o	x=b	P(b,c)=V
		o	x=c)	**P(c,c)=V**

y $\exists x P(x,a)$ = V

x=a **P(a,a)=V**

o x=b P(b,a)=V

o x=c P(c,a)=V

Conclusión

∃x∀zP(x,z) = F

x=a ∀zP(a,z) = F sii

z=a P(a,a)=F

ó z=b **P(a,b)=F**

ó z=c P(a,c)=F

y x=b ∀zP(b,z) = F sii

z=a **P(b,a)=F**

ó z=b P(b,b)=F

ó z=c P(b,c)=F

y x=c ∀zP(c,z) = F sii

z=a **P(c,a)=F**

ó z=b P(c,b)=F

ó z=c P(c,c)=F

Existe al menos un contramodelo (P(a,a)=V y **P(b,b)=V** y **P(c,c)=V ; P(a,b)=F** y **P(b,a)=F y P(c,a)=F), luego no hay consecuencia lógica.**

b) {∀xP(x) → Q(c)} ⊨ ∃x(P(x) → Q(c))

Premisas

∀xP(x) → Q(c) = V sii

∀xP(x) = F sii

x= a P(a) = F

o x= b P(b) = F

o $\quad$ x= c $\quad$ P(c) = F

o $\quad$ Q(c)=V

Conclusión

$\exists x(P(x) \rightarrow Q(c))$ = F sii

x=a $\quad$ $P(a) \rightarrow Q(c)$ = F sii

P(a)=V y Q(c)=F

y $\quad$ x=b $\quad$ $P(b) \rightarrow Q(c)$ = F sii

P(b)=V y Q(c)=F

y $\quad$ x=c $\quad$ $P(c) \rightarrow Q(c)$ = F sii

P(c)=V y Q(c)=F

Analizamos las opciones:

Q(c)=V en la premisa es incompatible con Q(c)=F que se tiene que cumplir en todas las opciones de la conclusión.

P(a)=F en la premisa es incompatible con P(a)=V que debe cumplirse en la primera alternativa de la conclusión. P(b)=F en la premisa es incompatible con P(b)=V que debe cumplirse en la segunda alternativa de la conclusión. P(c)=F en la premisa es incompatible con P(c)=V que debe cumplirse en la tercera alternativa de la conclusión.

No es posible encontrar un contramodelo que haga simultáneamente verdaderas las premisas y falsa la conclusión, luego existe consecuencia lógica.

Averiguar si la fórmula $Q(a,b) \vee Q(c,c)$ es o no consecuencia lógica de cada uno de los siguientes conjuntos:

1) $\{ \exists x\, P(x) \;,\; \forall y\, (P(y) \rightarrow Q(a,y)) \}$

2) $\{ \exists x\, P(x) \;,\; \forall y\, (P(y) \rightarrow Q(c,c)) \}$

eval enero 2016

1) Llamamos $A_1 \equiv \exists x\, P(x)$

$A_2 \equiv \forall y\, (P(y) \rightarrow Q(a,y))$

$B \equiv Q(a,b) \vee Q(c,c)$

- Buscamos un contramodelo, es decir i tal que $i(A_1) = i(A_2) = V$ y $i(B) = F$
- Tomamos como dominio $D = \{1,2,3\}$, por ejemplo
- $\boxed{i(a) = 1}$ $\boxed{i(b) = 2}$ $\boxed{i(c) = 3}$ por ejemplo
- $i(B) = i(Q(a,b) \vee Q(c,c)) = F$ $\quad i(Q(a,b)) = i(Q(c,c)) = F$ $\quad \boxed{Q_D(1,2) = Q_D(3,3) = F}$
- $i(A_2) = i(\forall y\, (P(y) \rightarrow Q(a,y))) = V$ sii

$i(P(a) \rightarrow Q(a,a)) = V$ sii $i(P(a))= F$ ó $i(Q(a,a)) = V$ (1)

y $i(P(b) \rightarrow Q(a,b)) = V$ sii $\boxed{i(P(b)) = F}$ ó $\cancel{i(Q(a,b)) = V}$

y $i(P(c) \rightarrow Q(a,c)) = V$ sii $i(P(c)) = F$ ó $i(Q(a,c)) = V$ (2)

- $i(A_1) = i(\exists x\, P(x)) = V$ sii $i(P(a)) = V$ ó $\cancel{i(P(b)) = V}$ ó $i(P(c)) = V$ (3)
- para hacer compatibles (1), (2) y (3) elegimos $\boxed{i(P(a)) = V}$ y $\boxed{i(Q(a,a)) = V}$
- los demás valores de $i(Q(x,y))$ pueden ser V o F $\Rightarrow$ hay unos cuantos contramodelos con ese dominio y las interpretaciones de a, b y c antes fijadas

$\Rightarrow$ se ha encontrado un contramodelo $\Rightarrow$ **NO es consecuencia lógica**

2) Sean $A_1 \equiv \exists x\, P(x)$

$A_2 \equiv \forall y\, (\, P(y) \rightarrow Q(c,c)\,)$

$B \equiv Q(a,b) \vee Q(c,c)$

- En este caso SÍ es consecuencia lógica:
- Una demostración con deducción natural es la siguiente:

1.-	$\exists x\, P(x)$	premisa
2.-	$\forall y\, (\, P(y) \rightarrow Q(c,c)\,)$	premisa
3.-	$P(d)$	elim 1, d constante temporal nueva
4.-	$P(d) \rightarrow Q(c,c)$	elim 3
5.-	$Q(c,c)$	modus ponens 3, 4
6.-	$Q(a,b) \vee Q(c,c)$	int $\vee$ 5

- por tanto $\{ A_1 , A_2 \} \vdash B$

- y por el teorema de completud $\{ A_1 , A_2 \} \vDash B$

- demostración semántica:

buscamos un contramodelo, i.e., i tal que $i(A_1) = i(A_2) = V$ y $i(B) = F$

$i(B) = F$ $\quad i(\, Q(a,b) \vee Q(c,c)\,) = F$ $\quad \boxed{Q_I(a,b) = Q_I(c,c) = F}$

$i(A_2) = V$ $\quad i(\, \forall y\, (\, P(y) \rightarrow Q(c,c)\,)\,) = V$

$y = a$ $\quad i(\, P(a) \rightarrow Q(c,c)\,) = V$

$y = b$ $\quad i(\, P(b) \rightarrow Q(c,c)\,) = V$

$y = c$ $\quad i(\, P(c) \rightarrow Q(c,c)\,) = V$

como $Q_I(c,c)\,) = F$ $\quad \boxed{P_I(a) = P_I(b) = P_I(c) = F}$ (1)

$i(A_3) = V$ $\quad i(\, \exists x\, P(x)\,) = V$ que no es compatible con (1)

$\Rightarrow$ No hay contramodelo $\Rightarrow$ **SÍ es consecuencia lógica**.

Probar: $\exists x\, P(x) \rightarrow Q(a) \;\vDash\; \forall x\, (\, P(x) \rightarrow Q(a)\,)$

$$\underbrace{\exists x\, P(x) \rightarrow Q(a)}_{A} \quad \vDash \quad \underbrace{\forall x\, (\, P(x) \rightarrow Q(a)\,)}_{B}$$

1) Forma indirecta: buscamos interpretación I tal que $I(A) = V$ y $I(B) = F$

$I(B) = F$ $\quad I(\,\forall x\, (\, P(x) \rightarrow Q(a)\,)\,) = F$ sii $I(\, P(i) \rightarrow Q(a)\,) = F$ para algún $i \in L(D)$

sii $I(P(i)) = V$ para algún $i \in L(D)$ y $I(Q(a)) = F$

sii $\exists x\, P(x)$ y $I(Q(a)) = F$ $\Rightarrow$ $i(A) = F$

$\Rightarrow$ No es posible encontrar un contramodelo $\Rightarrow$ SÍ es consecuencia lógica

2) Directamente: sea I interpretación cualquiera tal que $I(A)= V$; hay que probar $I(B)=V$

$I(A) = I(\,\exists x\, P(x) \rightarrow Q(a)\,) = V$ $\quad I(\,\exists x\, P(x)\,) = F$ ó $I(\, Q(a)\,) = V$

1er caso: $I(\,\exists x\, P(x)\,) = F$ $\quad I(\,\neg\exists x\, P(x)\,) = V$ $\quad I(\,\forall x\, \neg P(x)\,) = V$

$I(\neg P(i)) = V$ para todo $i \in (D)$ $\quad I(P(i)) = F$ para todo $i \in (D)$

$I(\, P(i) \rightarrow Q(a)\,) = V$ para todo $i \in (D)$ $\quad I(B) = V$

2º caso: $I(\, Q(a)\,) = V$ $\quad I(\, P(i) \rightarrow Q(a)\,) = V$ para todo $i \in (D)$ $\quad I(B) = V$